**Блок 1**

**Тема 1**

**Необходимо: уметь решать квадратные уравнения, раскладывать многочлены на множители.**

**Многочлены.**

*Многочленом n-ой степени стандартного (канонического) вида* называется функция y=a0+a1x+...+anxn an0. [1]

Числа a0, a1,..., an  называют *коэффициентами* этого многочлена, n - *степень многочлена.* Область определения многочлена - вся числовая прямая. В частности, многочлен первой степени y=P1(x)=a0+a1x называют *линейной* функцией, а многочлен второй степени называют квадратичной функцией. Многочленом n-ой степени называется функция, которая определена на всей числовой прямой и может быть приведена к многочлену n-ой степени стандартного вида. Например: функция f(x)= 1-x3+(x4-5)(x-2) определена на всей числовой прямой и может быть приведена к виду f(x)=11-5x-x3-2x4+x5 . Функция на области определения совпадает с многочленом y=x-2. Однако функция f(x) не является многочленом, так как она не определена в точке x=-2.

Число a называется нулем функции y=P(x) или корнем многочлена P(x), если P(a)=0.

Функцию вида  называют *рациональной*. Областью определения рациональной функции является вся числовая прямая за исключением тех точек, в которых знаменатель обращается в нуль.

Операции над многочленами [4].

Пусть A(x)=amxm+...+a1x+a0, B(x)=bnxn+..+b1x+b0, (будем считать без ограничения общности ).

Сложение.

A(x)+B(x)=(am+bm)xm+...+(a0+b0), где bs=0 при s>n.

Умножение.

A(x)B(x)=cm+nxm+n+...+c0, где cs=asb0+as-1b1+...+a0bs .

Деление многочлена с остатком [4].

В отличие от операций сложения и умножения многочленов операция деления многочлена на многочлен выполнима не всегда. Иными словами, если заданы многочлены A(x) и B(x), то не всегда найдется такой многочлен Q(x), что A(x)=Q(x)B(x).

Например, многочлен x3+3 не делится на многочлен x-3. Предположим иное, т.е. существует многочлен Q(x), x3+3=(x-3)Q(x). Тогда при замене x любым числом должно получиться верное равенство. Но при x=3 получаем: 33+3=(3-3)Q(x), т.е. 30=0 - неверное равенство.

Для многочленов определяется операция деления с остатком: пусть A(x) и B(x) - многочлены с действительными коэффициентами, причем B(x) - не нулевой многочлен. Тогда существуют такие многочлены Q(x) и R(x), что A(x)=B(x)Q(x)+R(x), причем степень многочлена R(x) меньше степени B(x).

При выполнении деления с остатком многочлена на многочлен часто бывает удобно применять метод неопределенных коэффициентов. Метод неопределенных коэффициентов заключается в том, что, когда известен вид искомых многочленов, но неизвестны их коэффициенты, заменяют в исследуемом тождестве эти многочлены их записью с неопределенными коэффициентами, приводят обе части равенства к стандартному виду, после чего приравнивают слева и справа коэффициенты при одинаковых степенях переменной. Это дает систему уравнений, позволяющую найти коэффициенты.

Пример. Разделим с остатком многочлен A(x)=3x5+2x4-3x3+6x2-x-1 на многочлен B(x)=x2+x+1.

Решение. Необходимо найти такие многочлены Q(x) и R(x), что

3x5+2x4-3x3+6x2-x-1= (x2+x+1)Q(x)+R(x). Причем, степень R(x) меньше степени B(x), т.е. не больше 2. Из того, что степень произведения многочленов равна сумме их степеней, следует, что степень Q(x) равна: 5-2=3. Т.е., хотя мы не знаем многочленов Q(x) и R(x), нам известны их степени. Но многочлены второй степени имеет вид Q(x)=q2x2+q1x+q0 и R(x)=r2x2+r1x+r0.

Подставляя эти выражения вместо Q(x) и R(x), получаем:

3x5+2x4-3x3+6x2-x-1=( x2+x+1)( q3x3+q2x2+q1x+q0)+ (r1x+r0).

Если в правой части этого равенства раскрыть скобки и привести подобные члены, то получим:

3x5+2x4-3x3+6x2-x-1= q3x5+( q2+ q3)x4+(q3+q2+q1)x3+(q0+q1+q2)x2+(q0+q1+r1)x+(q0+r0).

Это равенство должно выполняться для всех значений переменной. Но если два многочлена тождественно равны, то их коэффициенты при одинаковых степенях совпадают. Получаем систему уравнений: q3=3; q2+ q3=2; q3+q2+q1=3; q0+q1+q2=6; q0+q1+r1=-1; q0+r0=-1. Решая эту систему, получаем коэффициенты: q3=3; q2=-1; q1=-5; q0=12; r1=-8; r0=-13.

Вместо выписывания системы уравнений применяют запись *деления «уголком»*, аналогичную записи при делении чисел. Тот же пример решается следующим образом:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 3x5 | +2x4 | -3x3 | +6x2 | -x | -1 | x2 | +x | +1 |  |  |
| 3x5 | +3x4 | +3x3 |  |  |  | 3x3 | -x2 | -5x | +12 |  |
|  | -x4 | -6x3 | +6x2 | -x | -1 |  |  |  |  |  |
|  | -x4 | -x3 | -x2 |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | -5x3 | +7x2 | -x | -1 |  |  |  |  |  |
|  |  | -5x3 | -5x2 | -5x |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | 12x2 | +4x | -1 |  |  |  |  |  |
|  |  |  | 12x2 | +12x | +12 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | -8x | -13 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Теорема Безу [4].

Примем без доказательства три следующих утверждения, которые могут помочь в отыскании корней многочленов.

1. *Остаток от деления многочлена P(x) на двучлен x-a равен P(a).*
2. *Если число x является корнем многочлена P(x), то этот многочлен делится на x-a без остатка.*
3. *Если многочлен имеет корни a1, a2,...,an, то он делится без остатка на произведение*

*(x-a1)(x-a2)...(x-an).*

Следствие: *Многочлен степени n имеет не более n корней.*

Теорема Виета.

*Произведение корней квадратного уравнения ax2+bx+c=0 равно , а их сумма равна .*

**Основные методы решения рациональных уравнений.**

1. *Разложение на множители.*

Этот метод применим к уравнениям вида P(x)=0.

Пример 1. Решить уравнение: -24x3+80x2+56x-240=0.

Решение. Многочлен, стоящий в левой части уравнения, можно разложить на множители:

(2x-6)(8-4x)(3x+5)=0. Корнями этого уравнения являются числа, удовлетворяющие одному из уравнений: 2x-6=0, 8-4x=0, 3x+5=0. Значит, решением уравнения является множество {3; 2; -5/3}.

Пример 2. Решить уравнение: x4+12x3+32x2-8x-4=0.

Решение. Преобразуем многочлен в левой части уравнения:

x4+12x3+32x2-8x-4= x4+12x3+36x2-4x2-8x-4=(x2+6x)2-(2x+2)2=(x2+8x+2)(x2+4x-2).

(x2+8x+2)(x2+4x-2)=0. Задача свелась к решению уравнений: x2+8x+2=0 и x2+4x-2=0.

Решая их, находим корни исходного уравнения: {-4+, -4-, -2+, -2-}.

1. *Введение новой переменной.*

Разберем два случая указанного метода.

а) для решения биквадратного уравнения ax4+bx2+c=0 достаточно сделать подстановку x2=z, сводящую его к квадратному: az2+bz+c=0

б) чтобы решить возвратное уравнение ax4+bx3+cx2+bx+a=0, разделим обе части его на x2 и сгруппируем:

, после этого сделаем подстановку z=. Получаем уравнение : a(z2-2)+bz+c=0. Найдя его корни z1 и z2, решаем уравнения: =z1 и =z2.

Пример 3. Решить уравнение 6x4-5x3-38x2-5x+6=0.

Решение. Деля обе части на x2 и полагая z=, получаем уравнение: 6z2-5z-50=0. Оно имеет корни 10/3 и -5/2. Решив уравнения  и , получаем корни

{3; 1/3;-2;-1/2}.

3. *Отыскание рациональных корней уравнений с целыми коэффициентами*.

Любое уравнение, имеющее рациональные коэффициенты, равносильно уравнению того же вида, имеющему целые коэффициенты.

Например, если умножить обе части уравнения  на 30, получим равносильное уравнение , имеющее целые коэффициенты.

Необходимое условие для того, чтобы несократимая дробь была корнем уравнения

anxn+...+a0=0,  (1) с целыми коэффициентами, можно сформулировать следующим образом:

*Для того, чтобы несократимая дробь  была корнем уравнения (1), необходимо, чтобы числитель этой дроби был делителем свободного члена a0 , знаменатель - делителем коэффициента an при старшем члене.* Таким образом, чтобы найти рациональные корни

 уравнения (1), надо:

1. найти все целые делители свободного члена (положительные и отрицательные),
2. найти все натуральные делители коэффициента при старшем члене,
3. составить все дроби с найденными возможными значениями числителя и знаменателя,
4. из найденных дробей отобрать те, которые удовлетворяют заданному уравнению.

Пример 4. Найти корни уравнения:



Решение. Свободный член заданного уравнения имеет делители:  Коэффициент 2 при старшем члене имеет натуральные делители 1 и 2. Значит, «претендентами» на корни являются числа:  Подставляя эти числа исходного уравнение, отбираем корни:  Следовательно, многочлен  делится без остатка на , т.е. на . Выполнив деление, получим частное . Его корнями являются:

.

Ответ: ; .